ライプニッツの級数

山脇の超数学講座 No.48

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{\pi}{4}\qquad\cdots(*)$$

今回は，1，3，5，7，9，11，……という奇数の数列に，初項から順に(-1)をかけていったものの逆数をとって，無限に加えていくと $\frac{\pi}{4}$ に近づいていくという公式（ライプニッツの公式）を証明します。無限級数の形をしているので「ライプニッツ級数」とも呼ばれる有名な公式です。

$$1,\ -3,\ 5,\ -7,\ 9,\ -11\ \cdots\cdots$$
$\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$ $\times(-1)$ 【奇数列に順に(-1)をかける】

この数列の第 n 項は $(-1)^{n-1}(2n-1)$ と書けるので，その逆数の無限級数の和に 記号Σを使うと，$(*)$は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$ と書けます。

証明 まず，$\tan^n x$ の定積分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を考える。

$$I_k+I_{k+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^k x(1+\tan^2 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^k x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^k x\cdot(\tan x)'\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{k+1}\tan^{k+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{k+1}(1-0)=\frac{1}{k+1}\qquad\cdots\cdots\cdots①$$

①の右辺の分母が奇数になるように，$k\to2(k-1)$ を代入すると，

①は，$I_{2(k-1)}+I_{2k}=\frac{1}{2k-1}$ となり，さらに両辺に$(-1)^{k-1}$をかける。

$(-1)^{k-1}(I_{2(k-1)}+I_{2k})=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}\cdots\cdots②$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ として加えると

②の左辺 $=I_0+I_2-(I_2+I_4)+(I_4+I_6)-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-2}+I_{2n})$

$=I_0+(-1)^{n-1}I_{2n}=I_0-(-1)^nI_{2n}$ と途中の項が打ち消し合い，初項と末項が残る。

②の右辺 $=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

このように数列の第 n 項までの和を，無限級数の和に対して「部分和」という。部分和の n を無限大に大きくすれば$(n\to\infty)$，無限級数の和が得られる。

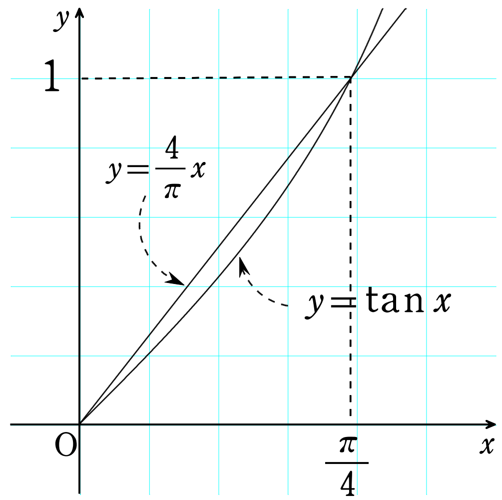

図1

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dx=[x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

図1のように，積分区間 $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ で $y=\tan x$ のグラフは下に凸であり，

$$0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x\quad\Longrightarrow\quad 0\leqq\tan^{2n}x\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}$$

$$0<I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}\,dx=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{4}=0$ だから，はさみうちの原理で，$\lim_{n\to\infty}I_{2n}=0$

したがって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1}=\lim_{n\to\infty}\{I_0-(-1)^nI_{2n}\}=I_0-0$$

$=\frac{\pi}{4}$ となって，$(*)$が証明された。 終

コメント 従来の「円周÷直径」という方法，あるいは円に接する正多角形を円に近づけていく方法で，πの近似値を求めるのでなく，無限級数の和から求めるという画期的な方法を生み出したが，級数の収束が遅いので実用的でなく，実際には他の無限級数による方法が用いられている。